Rapport sur les travaux effectués et Programe de recherche

Simon Henry

Janvier 2018

Table des matières

1 Rapport sur les travaux effectués **1**
1.1 Logique catégorique (introduction) 1
1.2 Topos et C^*-algèbres 2
1.3 Analyse constructive et topologie sans points 4
1.4 Catégories supérieures 6
1.4.1 Modèles algébriques pour les types d'homotopies 6
1.4.2 Polygraphes et conjecture de Simpson 7

2 Programe de recherches **9**
2.1 Modèles algébriques pour les structures supérieures 9
2.1.1 Le problème de la strictification et la conjecture de Simpson 12
2.2 Les relations entre un topos et sa C^*-algèbre 14
2.2.1 KK-théorie relative à un topos et conjectures d'isomorphismes 14
2.3 La C^*-algèbre d'un champ différentiel 15

1 Rapport sur les travaux effectués

1.1 Logique catégorique (introduction)

Avant de présenter mes recherches à proprement parler je souhaiterais présenter brièvement un des thèmes centraux de mes travaux : la logique catégorique.

En un sens la logique catégorique débute avec les travaux de W.Lawvere en 1964 ([33]) qui donnent une axiomatisation de “la catégorie des ensembles” (appelée ETCS pour “Elementary Theory of the Category of Sets”). Plus précisément il axiomatise les propriétés que, selon lui [1], une catégorie doit satisfaire pour servir de “fondation des mathématiques” en tant que “catégorie des ensembles”. D'une certaine façon un modèle d'ETCS est comparable à un modèle de ZFC (en toute rigueur ETCS est légèrement plus faible que ZFC : il lui manque l'axiome de remplacement, mais on peut l'ajouter si besoin).

Le sujet a ensuite graduellement évolué en réalisant que d'autres sortes de catégories, satisfaisant des axiomes plus faibles que ETCS, pouvaient aussi se voir de la même façon comme des “univers mathématiques” dans lesquels moins d'axiomes ou de principes logiques sont valides.

1. On sait aujourd'hui par exemple que l'un des axiomes de Lawvere “well pointed” peut-être retiré à condition d'utiliser une interprétation plus subtile de la quantification existentielle dans une catégorie.

On peut par exemple renoncer à l'axiome du choix, au principe du tiers exclu [2], à l'axiome de l'ensemble des parties, à l'axiome de l'infini, ou encore limiter l'axiome de séparation, ou le type de quantificateurs et d'opérations logiques que l'on peut utiliser. L'idée générale est qu'en faisant attention aux principes nécessaires pour démontrer un résultat, on peut le transformer en un résultat qui s'applique à beaucoup d'autres catégories que la catégorie des ensembles. Voici les trois exemples de telle paire "fragment de logique/interprétation catégorique" qui nous intéressent le plus :

Le premier exemple de la sorte (et aussi probablement le plus étudié) est bien entendu les topos (élémentaires ou de Grothendieck). De ce point de vue, un topos correspond à un modèle d'une théorie constructive/intuitionniste des ensembles (i.e. sans le principe du tiers exclu ni l'axiome du choix). Cette approche s'est avérée incroyablement fructueuse pour la théorie des topos : de nombreux résultats portant sur les objets d'un topos, qui auraient été autrement très complexes à démontrer, sont obtenus très simplement en montrant un énoncé similaire pour des ensembles en mathématiques intuitionnistes, voir par exemple [29] pour plusieurs exemples parmi les plus flagrants. De nombreux exemples de cette technique apparaissent aussi dans mes travaux ([19], [25], [24], etc.).

Un deuxième exemple est la "logique géométrique". Il s'agit de la logique interne des pré-topos infinitaires, qui correspond à une forme de "mathématiques prédicatives", pour une notion assez strict de predicativité où l'on rejette en particulier le fait que pour A et B deux ensembles $\{f : A \to B\}$ est un ensemble. Bien que l'on puisse douter de l'intérêt des pré-topos [3], cette forme de logique est extrêmement importante car il s'agit du fragment de logique qui est préservé par les foncteurs de tiré en arrière le long des morphismes géométriques. De plus, les notions qui peuvent se définir dans le cadre de la logique géométrique sont exactement celles qui admettent des topos classifiant. C'est aussi à ce fragment de logique que s'applique le théorème de Barr dont on parlera au début de la section 3.

Un dernier exemple qui a suscité énormément d'intérêt ces dix dernières années est la théorie homotopique des types, qui revient à affaiblir la notion d'égalité en une notion d'équivalence ou d'isomorphisme : "$x = y$" n'est plus une proposition, mais un ensemble (un type) dont les éléments peuvent s'interpréter comme des "isomorphismes entre x et y", ou des "chemins entre x et y", ou encore des "preuves que $x = y$". La version de la théorie homotopique des types présentée dans [46] devrait être assez proche de la logique interne d'un $(\infty, 1)$-topos, et des versions affaiblies de cette théorie devraient correspondre à la logique interne de différents types de $(\infty, 1)$-catégories. Malheureusement ceci est encore en partie conjecturel.

1.2 Topos et C^*-algèbres

Dans cette partie je discute les recherches initiées pendant ma thèse.

Aussi bien les topos (de Grothendieck) que les C^*-algèbres sont des objets qu'on veut considérer comme des "espaces topologiques généralisés". Et on dispose d'une longue liste d'objets (Feuilletages, systèmes dynamiques, groupoïdes topologiques, graphes et graphes supérieures, etc.) qu'on peut étudier aussi bien en leur attachant un topos qu'une C^*-algèbre. De plus pour ces exemples des isomorphismes entre les topos associés tendent à donner lieu à des isomorphismes ou des équivalences de Morita entre les C^*-algèbres correspondantes. Il est donc assez naturel de se demander si ces deux généralisations de la topologie ordinaire sont reliées ou non. Ma thèse ([16]) et une partie de mes travaux sont consacrées à cette question. Mon point de départ était l'observation suivante :

2. qui dit que la proposition "A ou non A" est vraie quelle que soit la proposition A.
3. surtout que le théorème de Giraud montre que tous les pré-topos infinitaires avec un ensemble de générateurs sont des topos de Grothendieck

Si $\mathcal{T}$ est un topos, on peut définir, en utilisant la logique interne, une bonne notion de champ (semi-)continu [4] d'espaces de Banach sur $\mathcal{T}$. En effet, en interprétant correctement la notion d'espace de Banach dans la logique interne on obtient une notion "d'objet en espace de Banach" dans un topos. Dans le topos des faisceaux sur un espace topologique X ces "objets en espaces de Banach" sont exactement les faisceaux de sections locales de champ (semi-)continu d'espaces de Banach sur X. Pour un topos général on définit les champs (semi-)continus d'espaces de Banach comme étant les objets en espaces de Banach du topos. On peut faire de même en remplaçant "espaces de Banach" par "C^*-algèbres" ou "espaces de Hilbert" pour obtenir des notions de champ (semi-)continu de C^*-algèbres ou d'espaces de Hilbert.

De plus, pour n'importe quel topos $\mathcal{T}$, la catégorie des champs continus d'espaces de Hilbert sur $\mathcal{T}$ (i.e. des objets de $\mathcal{T}$ en espace de Hilbert) est une C^*-catégorie (la généralisation à plusieurs objets de la notion de C^*-algèbre). Ainsi cette construction associe à n'importe quel topos une C^*-catégorie et donc de nombreuses C^*-algèbres interconnectées, et c'est cette observation qui offre un pont entre la théorie des topos et la théorie des C^*-algèbres.

Dans chacun des exemples mentionnés plus haut (graphes, groupoïdes etc.) où l'on dispose d'une C^*-algèbre et d'un topos, cette C^*-catégorie des champs d'espaces de Hilbert sur le topos, s'avère être proche de la C^*-algèbre, mais n'est pas exactement équivalente. En fait la "bonne" C^*-algèbre apparaît en général comme une sous algèbre d'endomorphismes dans la C^*-catégorie. Dans mon article le plus récent sur ce sujet ([24]), dont je parlerai plus loin, j'ai enfin réussi à définir ce qu'était "la C^*-algèbre d'un topos" (à Morita équivalence près) sous certaines conditions sur le topos, d'une façon qui englobe tous les exemples que nous connaissions. On peut donc bien parler de la C^*-algèbre d'un topos.

La premier chapitre de ma thèse étudie une correspondance (déjà en partie connue) entre topos et "quantales de Grothendieck" qui, bien que disjointe de la théorie des C^*-algèbres, est formellement très similaire à la construction présentée ci-dessus. Cette correspondance est ensuite utilisée pour étudier plus précisément la C^*-catégorie associée à un topos et la C^*-algèbre qui devrait correspondre au topos dans le cas particulier des topos dit "atomiques". Dans ce cas spécifique, on arrive à une compréhension assez complète de la C^*-catégorie, de la façon dont est sélectionnée la C^*-algèbre du topos et des hypothèses nécessaires pour que cette algèbre existe. Cette partie n'as pas été publiée séparément de ma thèse, mais a été extrêmement importante pour la compréhension des cas plus généraux par la suite. C'est en quelque sorte un "toy model" de la relation entre topos et C^*-algèbres pour lequel on peut tout décrire explicitement mais sur lequel on observe déjà des phénomènes généraux que j'ai étudiés par la suite.

Dans le deuxième chapitre de ma thèse (reprise dans l'article [23]) je me suis intéressé au cas des topos booléens intégrables. Dans ce cas ce n'est pas une C^*-catégorie et une C^*-algèbre qu'on parvient à construire, mais une W^*-catégorie et une algèbre de Von Neumann. En un sens, cela correspond à la théorie de la mesure pour les toposes (d'où le titre de l'article). Le résultat principal de cette partie est que dans ce cas précis, et quand le topos satisfait une condition supplémentaire de séparation locale, on obtient canoniquement une famille à un paramètre d'endofoncteurs de la W^*-catégorie associée. C'est l'analogue en théorie des topos de l'évolution temporelle modulaire des algèbres de von Neumann.

Le troisième chapitre de ma thèse aborde un sujet légèrement différent qui sera discuté dans la section suivante.

J'ai poursuivi ce programme de recherches au-delà de ma thèse :

Dans [20] j'ai commencé à étudier dans quelle mesure on peut réciproquement reconstruire un topos à partir de sa C^*-catégorie des champs d'espaces de Hilbert. Cela devient possible

4. un champ continu d'un certain type de structure sur un espace est une notion de famille "continue" de structures de ce type indexées par l'espace, par exemple un fibré vectoriel est un type particulier de champ continu d'espaces vectoriels

(sous certaines conditions sur le topos) si on tient compte de la structure monoïdale venant du produit tensoriel "fibres à fibres" des champs continus d'espaces de Hilbert sur le topos. Plus précisément, je montre dans cet article que dans le cas d'un topos booléen localement séparé, le topos est exactement le topos classifiant de la théorie des représentations normales monoïdales de sa C^*-catégorie. Cette construction est analogue au formalisme Tannakien dans sa version "sans point base" comme dans [36]. Des résultats que j'ai obtenus ultérieurement montrent permette d'étendre ce résultat à une classe beaucoup plus large de topos (non booléens) et j'envisage de réécrire complètement [20] pour tenir compte de cela.

Dans [19] j'ai caractérisé les topos qui admettent suffisamment d'objets finis par des conditions de nature topologique. Le résultat similaire dans le cas des topos booléens (beaucoup plus simple) était la clé des résultats prouvés dans [23] et [20], et pouvoir l'étendre à des topos non booléens était une étape importante vers l'étude de topos plus généraux ([17], [24]).

Dans [17], j'ai montré que quand un topos est séparé, localement décidable et localement compact, on a un théorème de type Green-Julg qui affirme que la C^*-catégorie de ce topos n'est autre que la catégorie des modules Hilbertiens sur la C^*-algèbre du topos. Cela caractérise la C^*-algèbre du topos à Morita équivalence près comme étant la C^*-algèbre des endomorphismes compacts de n'importe quel champ d'espaces de Hilbert générateur de la C^*-catégorie. Malheureusement, comme pour le théorème de Green-Julg classique, les cas où ce théorème s'applique sont assez restrictifs : ils correspondent essentiellement aux groupoïdes séparés et propres qui sont assez peu intéressants du point de vue de la géométrie non-commutative (ils ne produisent que des algèbres de type I). Pour montrer ce résultat, j'ai développé une notion de C^*-catégories "complètes" (au sens catégorique du terme) et obtenu une caractérisation abstraite des C^*-catégories de modules Hilbertiens.

Dans [24] je donne précisément les hypothèses nécessaires sur un topos pour construire sa C^*-algèbre (réduite et maximale) et explique comment celle-ci est construite. Cette version englobe tous les exemples que nous avons mentionnés : algèbres de graphes, algèbres de feuilletages et de systèmes dynamiques, algèbres de groupoïdes étales. Cela associe aussi une algèbre à certains groupoïdes non étales (des groupoïdes dits "étale complets") qui est seulement Morita équivalente à l'algèbre du groupoïde. Par exemple l'algèbre associée à un groupe localement profini par cette construction est une algèbre de Hecke de doubles co-ensembles. La construction produit aussi une algèbre de convolution "algébrique" (analogue de l'algèbre de convolution à support compact) et des algèbres de Banach L^1 ou L^p. Á Morita equivalence près, on ne connaît pas d'exemple réellement nouveau de construction de C^*-algèbres par cette méthode. Cela dit, cette méthodes permet de montrer des isomorphisms ou équivalences de Morita entre différentes algèbres (typiquement entre des algèbres de Graphes et de groupoïdes). De plus, le fait que cette construction peut elle même s'appliquer en logique interne permet d'obtenir à partir d'un morphisme géométrique $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$ satisfaisant de bonnes conditions un champ de C^*-algèbres sur $\mathcal{S}$ correspondant à l'application de cette construction "fibre à fibres" et cette version relative produit des exemples nouveaux. Elle produit aussi une "propriété universelle" intéressante pour l'algèbre de convolution et les algèbres L^1 et L^∞.

1.3 Analyse constructive et topologie sans points

Afin d'étudier convenablement les champs de C^*-algèbres, d'espaces de Hilbert ou d'espaces de Banach sur un topos tel que décrits dans la partie précédente, la méthode la plus efficace est de les étudier dans la logique interne. Cela demande de faire de l'analyse fonctionnelle en mathématiques constructives, i.e. sans l'axiome du choix ni le principe du tiers exclu. Cela peut sembler impossible, mais on dispose maintenant de méthodes pour cela.

Un principe directeur pour cela est le théorème de Barr : si à partir d'hypothèses formulées en logique géométrique, on peut déduire une conclusion aussi formulée en logique géométrique en utilisant toute les mathématiques classiques (incluant l'axiome du choix et le principe du tiers exclu), alors il existe en fait une démonstration de cette déduction purement dans le cadre de la logique géométrique (et donc constructive). Bien que l'on évite (pour des raisons techniques) d'utiliser le théorème de Barr lui même, il nous enseigne qu'un bon moyen de transposer des résultats classiques en résultats constructifs est de les formuler "géométriquement", c'est-à-dire essentiellement d'une façon qui les rend stables par tiré en arrière le long d'un morphisme géométrique.

De nombreuses constructions importantes en analyse (par exemple le dual d'un espace de Banach ou le spectre d'une C^*-algèbre) ne sont pas géométriques au sens précédent. Mais il existe une technique pour les rendre géométriques : il faut les remplacer par leur analogue "localique". Une locale (l'objet d'étude de la topologie sans point) est un type particulier de topos très similaire à un espace topologique, à la seule différence qu'une locale peut ne pas avoir de point, en fait une locale ayant "suffisamment" de points est exactement la même chose qu'un espace topologique sobre. En mathématiques classiques, les notions de locale et d'espace topologique sont très proches. Par exemple, une locale localement compacte est toujours un espace topologique. Mais en mathématiques constructives, les points deviennent plus difficiles à construire et les deux théories deviennent beaucoup plus différentes, la théorie des locales ayant alors tendance à beaucoup mieux se comporter. L'idée est donc de remplacer, dans la définition du spectre ou du dual, l'ensemble des caractères ou l'ensemble des formes linéaires par "le topos classifiant de la théorie des caractères ou des formes linéaires" pour obtenir le spectre localique ou le dual localique. En mathématiques classiques, ces constructions sont équivalentes aux constructions classiques, mais elles deviennent différentes en mathématiques constructives, et seules les versions localiques sont géométriques.

Une fois que l'on dispose de ces constructions, on peut reformuler des théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle en termes localiques, ce qui les rend en général géométriques et donc donne des théorèmes constructifs. Par exemple le théorème de Hahn-Banach pour un espace de Banach E devient en mathématiques constructives le fait que l'application de restriction est une surjection propre de la boule unité du dual localique de E sur la boule unité du dual localique de n'importe quel sous espace de E. On ne peut pas en déduire l'existence de formes linéaires (une forme linéaire serait un point du dual), mais de très nombreuses conséquences du théorème de Hahn-Banach peuvent se déduire de cet énoncé localique. De façon similaire, la dualité de Gelfand devient constructive si on la formule de la façon suivante : toute C^*-algèbre commutative est isomorphe à l'algèbre des fonctions continues sur son spectre localique. Ces résultats sont dus respectivement à C.J.Mulvey et J.W.Pelletier [38] et à B.Banaschewski et C.J.Mulvey [3].

En résumé, la théorie des topos et la logique catégorique fournissent à la fois les motivations et les outils pour faire des mathématiques constructives.

Dans le troisième chapitre de ma thèse (publié en tant que [22]), j'ai considérablement développé la théorie constructive des espaces métriques localiques et des espaces de Banach localiques. Cela m'a permis de résoudre une question posée par Mulvey et Banaschewski dans [3] : j'ai démontré une généralisation purement localique de leur version de la dualité de Gelfand. Précisement : il y a une équivalence de catégorie (contravariante) entre les locales séparées compactes et les C^*-algèbres localiques commutatives unitaires. La version de Mulvey et Banachewski s'appliquait aux C^* ordinaires et ils avaient besoin d'introduire une condition peu naturelle sur les locales pour qu'elles correspondent bien aux C^*-algèbres ordinaires. Interpréter dans le topos des faisceaux sur un espace topologique, ces espaces de Banach localiques correspondent à des champs (semi)continus qui n'ont pas forcement suffisamment de sections continues.

Dans [15], j'ai étendu la dualité de Gelfand à la Mulvey et Banaschewski (ainsi que ma version purement localique de cette dualité [22]) au cas de C^*-algèbres non unitaires. Je prouve aussi quelques théorème reliés à cette dualité (par exemples la correspondances entre les ideaux et les ouverts, et ses propriétés de fonctorialités). Pour cela j'ai dévelopé quelques outils de la théorie des locales d'intérêt indépendant, notamment la compactification d'Alexandrov pour les locales.

Dans [18], je développe une version localique et donc géométrique du topos de Bohr d'une C^*-algèbre. Le topos de Bohr d'une C^*-algèbre est une des constructions de base des approches de la mécanique quantique basées sur la théorie des topos ([27]). Mais cette construction souffre d'un certain nombre de défauts éliminatoires : la "topologie" de l'espace obtenu n'est pas la bonne, et surtout la construction n'est pas géométrique alors qu'il faudrait qu'elle le soit pour remplir pleinement la fonction pour laquelle elle a été introduite. Cette nouvelle version localique est plus complexe mais règle ces deux problèmes.

En annexe de [17], je développe de façon localique et constructive la théorie du spectre et du rayon spectral d'un élément dans une algèbre de Banach ainsi que la théorie de la positivité et du calcul fonctionnel dans les C^*-algèbres.

Enfin dans [25] j'utilise les outils de la théorie des locales pour un problème très différent : Dans [13], les auteurs ont montré que tout topos de Grothendieck admet un objet en groupe complètement canonique (le groupe d'isotropie du topos) qui agit naturellement sur tous les objets du topos. J'ai montré que leur groupe d'isotropie est en fait le groupe des points d'un "groupe d'isotropie localique" dont l'origine est beaucoup plus claire et qui possède de bien meilleur propriétés de stabilité et de fonctorialité. Le groupe d'isotropie localique est juste le "classifiant des automorphismes des points" du topos. Comme le groupe d'isotropie original il agit très naturellement sur tous les objets du topos, mais il agit aussi sur toutes les locales ou topos définis au dessus du topos de départ. De plus ces meilleures propriétés de stabilité et de fonctorialité permettent de résoudre plusieurs problèmes de la théorie originale, notamment le phénomène d'isotropie supérieure et permet, par exemple, d'obtenir une nouvelle factorisation en "atomique connexe/essentiellement anisotropique" pour les morphismes géométriques (ce qui était l'un des objectifs de la théorie originale) ainsi qu'une nouvelle forme de "théorie de Galois" pour les morphismes géométriques atomiques.

1.4 Catégories supérieures

Les deux sections suivantes sont deux facettes distinctes d'un même thème de recherche, et le lien entre les deux sera expliqué dans mon programme de recherches.

1.4.1 Modèles algébriques pour les types d'homotopies

Comme je l'ai mentionné dans l'introduction, la théorie homotopique des types est supposée jouer le rôle de la logique interne pour les ∞-catégories, ou est en tous cas une des possibilités pour ce rôle. En théorie homotopique des types, les objets de base sont déjà des ∞-groupoïdes. En particulier, de nombreuses constructions de base vont necessité la gestion d'un nombre infini de conditions de cohérences, ce qu'une bonne théorie (interne) des catégories supérieures devrait être capable de faire. De plus, une telle théorie des catégories supérieures internalisable en théorie des types sera extrêmement importante, au moins pour la théorie des ∞-toposs : en théorie des topos, étudier les topos de Grothendieck dans la logique interne permet d'étudier les morphismes géométriques "fibres à fibres".

Malheureusement, la théorie homotopique des types s'avère pour l'instant incapable d'étudier les catégories supérieures, ou de gérer ce problème des cohérences supérieures. Il y a deux problèmes :

- La majorité des modèles dont nous disposons pour les catégories supérieures reposent sur les ensembles simpliciaux (ou d'autres combinatoires similaires : cubiques, opetopiques, dendroïdaux etc.). Définir ceux-ci en théorie des types pose déjà un problème de cohérence supérieures que personne n'a su résoudre pour l'instant.
- Le plus part de ces modèles sont non-constructifs et donc probablement pas utilisables en théorie des types.

Une possible solution à ce problème a été suggérée par G.Brunerie (appendice A de [8]). Il a montré que la définition de Grothendieck d'∞-groupoïdes globulaires pouvait s'utiliser en théorie des types. Et cela reste vrai pour son extension par G.Maltsiniotis en une définition des ∞-catégories (en utilisant sa forme donnée dans [12]).

Malheureusement, on ne sait pas vraiment comment travailler avec ces définitions d'∞-catégories et d'∞-groupoïdes : définir les foncteurs faibles entre ces objets et leurs compositions est un problème difficile, et montrer que l'on obtient ainsi une "∞-catégorie des ∞-catégories" est un problème ouvert. La comparaison de ce modèle avec les autres approches des ∞-catégories est aussi un problème ouvert.

Enfin, il s'avère que la théorie des types est elle même profondément globulaire (cf. [44]). Il serait en fait plus correct de dire que la théorie homotopique des types est supposée être la logique interne de certaines ∞-catégories globulaires. Pour pouvoir l'utiliser comme logique interne d'∞-catégories d'un autre types (des quasi-catégories par exemple), il faut d'abord prouver un théorème de comparaison avec ces catégories globulaires. Cela donne donc de bonnes raisons de faire avancer la théorie des ∞-catégories globulaires.

Dans [21], je me suis attelé à cette tâche dans le cas particulier plus simple des ∞-groupoïdes. J'ai commencé par m'intéresser aux "catégories à objets des chemins" introduites par I.Moerdijk et B.Van den Berg dans [5] et [6], qui sont des catégories permettant l'interprétation d'une version faible de la théorie des types. Plus précisément je me suis intéressé à leures opposées catégoriques que j'ai appelées des catégories à cylindres ("cylinder categories"). J'ai montré qu'on pouvait voir ces catégories à cylindres comme des "objets fibrants" dans une catégorie algébrique des "pré-catégories à cylindres" et que cela permettait de construire des catégories à cylindres "libres", en prenant un remplacement fibrant d'une vrai construction libre de pré-catégorie à cylindres. Le concept central de l'article est la notion de cohérateur de cylindres, qui sont des catégories à cylindres librement engendrées par un objet au sens précédent.

J'ai montré que chaque cohérateur de cylindres $\mathcal{C}$ définit une notion d'∞-groupoïde que l'on appelle les $\mathcal{C}$-groupoïdes. Ces notions sont purement algébriques. De plus pour chaque $\mathcal{C}$, les $\mathcal{C}$-groupoïdes forment une semi-catégorie de modèles au sens de Spitzweck, et toutes ces catégories sont Quillen équivalentes entre elles et Quillen équivalentes aux modèles classiques d'∞-groupoïdes (par exemple la catégorie des espaces topologiques).

Il existe un cohérateur de cylindres $\mathcal{C}$ tel que les $\mathcal{C}$-groupoïdes soient de type "simplicial". Plus précisément, il s'agit des complexes de Kan algébriques semi-simpliciaux. Pour un autre cohérateur, on obtient des groupoïdes globulaires très proches de la définition de Grothendieck et de la théorie des types, pour lesquels l'argument de G.Brunerie s'applique encore. Il s'agit des ensembles globulaires munis de toutes les opérations que l'on peut définir en théorie des types en utilisant uniquement le principe d'induction 'faible' pour les types identités. J'ai ainsi construit le premier modèle algébrique et globulaire d'∞-groupoïdes pour lequel l'hypothèse d'homotopie est démontrée.

Enfin, sous une conjecture technique d'apparence simple, la définition de Grothendieck d'∞-groupoïdes peut être obtenue pour un certain cohérateur, et si cette conjecture est démontrée, cela résout immédiatement tous les problèmes ouverts liés à la définition de Grothendieck (notamment l'hypothèse d'homotopie). La conjecture en question affirme que si l'on part d'un groupoïde de Grothendieck finement engendré (i.e. obtenu en ajoutant librement des n-flèches itérativement un nombre fini de fois) et que l'on ajoute librement une n-flèche et un $(n+1)$-isomorphisme entre cette nouvelle flèche et une flèche préexistante, on obtient un groupoïde faiblement équivalent.

1.4.2 Polygraphes et conjecture de Simpson

Dans [30] M.Kapranov et V.Voevodsky ont "démontré" une forme de l'hypothèse d'homotopie qui permet d'associer à n'importe quel type d'homotopie un "∞-groupoïde fondamental" qui est donné par une ∞-catégorie stricte dont toutes les flèches sont faiblement inversibles, cet ∞-groupoïde classifiant les types d'homotopies et redonnant les bons groupes d'homotopies. Les ∞-catégories strictes sont des objets beaucoup plus simples et explicites que leurs analogues faibles, mais malheureusement ce résultat est faux, comme cela a été démontré par C.Simpson dans [42]. Dans le même article C.Simpson a conjecturer que le résultat de Kapranov et Voevodsky est correct si on autorise de plus les unités des ∞-groupoïdes fondamentaux à être faibles (ne pas avoir $1 \circ x = x$ mais seulement $1 \circ x \simeq x$). Il dit aussi penser que [30] contient probablement la preuve de cette conjecture, mais n'a pas réussi à expliquer précisément où est l'erreur dans [30].

Dans [26] j'ai étudié très en détail la démonstration de [30] pour essayer de démontrer la conjecture de Simpson. J'ai mis en évidence certains points précis qui sont vraisemblablement responsables de l'échec de cette démonstration et j'ai résolu ces problèmes dans le cas où on affaiblit les unités.

Plus précisément, la stratégie initiale de [30] est d'associer à tout espace topologique une ∞-catégorie stricte des "homotopies de Moore généralisées". Par exemple, en dimension 1, pour obtenir que la composition des chemins soit strictement associative il suffit d'autoriser la longueur des chemins à être variables (c'est ce qu'on appelle les chemins de Moore). En dimension supérieure il faut poursuivre cette idée en autorisant les homotopies à être paramétrées par des diagrammes plus complexes que des disques. Par exemple, en dimension 2 on veut des homotopies indexées par des diagrammes comme :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] \arrow[rr, bend right=70] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \\ & {} & \end{tikzcd} \quad \text{ou} \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] \arrow[rr, bend right=70] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \\ & {} & \end{tikzcd} .$$

Le point crucial de cette démonstration est de choisir convenablement la forme des diagrammes qui vont indexer les homotopies. Le problème dans l'approche de Kapranov et Voevodsky se situe dans ce choix : La classe de diagrammes qu'ils utilisent s'avère d'une part ne pas être stable par composition et d'autre part ne pas toujours permettre de représenter des homotopies entre des diagrames de dimensions inférieures déjà existants (et donc de ne pas correctement capter les groupes fondamentaux).

Mon idée dans [26] est d'une part que pour un certain type d'opérations que l'on souhaite rendre strictes il n'existe qu'une seule classe de diagrammes ayant les bonnes propriétés pour faire fonctionner cette stratégie. Cette classe n'existe pas tout le temps et son existence est reliée au fait qu'une certaine catégorie de polygraphes est une catégorie de préfaisceaux. Pour les ∞-catégories, il est bien connu que les polygraphes ne forment pas une catégorie de préfaisceaux, ce qui explique pourquoi le résultat de Kapranov et Voevodsky ne peut pas être démontré de cette manière. En revanche, et c'est mon résultat principale dans [26], une telle classe de diagrammes existe si on s'intéresse aux ∞-catégories "sans unités". C'est le titre de l'article : les polygraphes non unitaires forment une catégorie de préfaisceaux, et c'est un résultat important pour la théorie des polygraphes (qui avait été conjecturé par P.T.Johnstone et A.Carboni).

Il semble que le reste de la démonstration de Kapranov et Voevodsky soit principalement correct et nous sommes donc peut-être proche de pouvoir démontrer la conjecture de Simpson. Il y a en revanche une nouvelle difficultée : il s'avère que dans cette nouvelle catégorie de diagrammes que j'ai construite, il n'est plus vrai que tous les objets ont une réalisation géométrique contractible, cela introduit des difficultés supplémentaires que je ne sais pas encore résoudre, et c'est à priori le dernier obstacle pour démontrer la conjecture de Simpson.

2 Programe de recherches

2.1 Modèles algébriques pour les structures supérieures

Depuis quelques dizaines d'années, un nouveau type de structures mélangeant algèbre et théorie de l'homotopie, des “structures algébriques supérieures”, est apparu dans de nombreux domaines des mathématiques : très tôt en topologie algébrique, et plus récemment en géométrie algébrique, en physique mathématique ou encore en analyse algébrique. Dans ce texte, par “structures algébriques supérieures” j'entends de façon informelle tous les types de structures que l'on rencontre dans le monde des catégories supérieures : ∞-groupoïdes, (∞, n)-catégories, ∞-opérades, Spectres, ∞-catégories monoïdales, algèbres A_∞,E_∞ ou L_∞, etc. et ce indépendemment de la façon dont elles sont modélisées.

Donner des définitions précises de ces structures est complexe. De plus pour chacune d'entre elles on dispose de nombreux modèles (i.e. plusieurs définitions précises). À titre d'exemple [34] présente pas moins de 10 définitions différentes de la notion de n-catégorie ou ∞-catégorie faible qui existaient déjà en 2001, et encore d'autres définitions ont été introduites depuis ([45], [40], etc.) . Ces différents modèles ne sont en général pas équivalents au sens algébrique, mais seulement après passage à une “catégorie homotopique”, et le plus souvent seulement conjecturalement.

Enfin dans les cas où l'on dispose de théorèmes de comparaison entre différents modèles il est aussi fréquent que l'on dispose en fait de plusieurs façons de comparer les mêmes modèles (ou qu'il existe des “boucles” de comparaisons entre différents modèles). Dans ce cas il faut ensuite montrer que ces différentes façons de comparer les modèles deviennent équivalentes quand on passe aux catégories homotopiques (et en toute rigueur il faudrait aussi montrer que les différentes équivalences entre les comparaisons sont elle même équivalentes etc...).

L'objectif premier de cette partie de mon programme de recherches peut se résumer en une phrase : ***Il s'agit de développer des outils pour construire et comparer de façon plus systématique toutes les structures de modèles qu'on rencontre dans le monde des catégories supérieures, et si possible de les étudier de façon synthétique.*** Cela peut sembler vague ou inaccessible, mais plusieurs idées, que je vais expliquer, me laisse penser que c'est en réalité un objectif relativement accessible.

On peut commencer par mentionner un cas où ce but est déjà globalement atteint : la théorie des opérades joue déjà ce rôle pour certaines des structures mentionnées plus haut comme les algèbres A_∞, E_∞ et L_∞. Par exemple une “théorie des algèbres E_∞” est donnée par n'importe quelle “opérade symétrique Σ-cofibrante contractible”, et toutes les opérades de cette forme sont équivalente à cause de propriétés de la structure de modèles de Quillen sur la catégorie des opérades. Bien entendu tout cela n'a de sens qu'une fois qu'on a choisi une définition pour la notion d'∞-groupoïde.

J'ai expliqué dans le résumé de mes recherches comment dans [21] j'ai mis en place une machinerie pour produire et comparer des définitions d'∞-groupoïdes. Il s'avère que cette machinerie a une portée beaucoup plus large que cela, et semble pouvoir s'appliquer à toute sorte de théorie algébrique supérieure et jouer un rôle similaire à celui que joue la théorie des opérades pour les algèbres A_∞, E_∞ ou L_∞. Je vais expliquer cela plus en détails, et dans un langage différent :

Une théorie algébrique généralisée (ou théorie de Cartmell, introduite dans [10]) est une sorte de théorie algébrique à plusieurs types, où l'on peut avoir des types dépendants de paramètres appartenant à d'autres types. Par exemple si on prend la théorie des catégories, on peut l'axiomatiser comme une théorie "essentiellement algébrique" avec deux types (objets et morphismes) et une opération de composition partiellement définie, mais on peut aussi l'axiomatiser comme une "théorie algébrique généralisée" avec un type des "objets" et un deuxième type "Hom(x,y)" des "morphismes de x dans y" qui dépend de deux paramètres (x et y) de type "objets" et où cette fois la composition $Hom(y,z) \times Hom(x,y) \to Hom(x,z)$ est une opération totale (les théories de Cartmell n'ont pas d'opérations partielles).

Si on s'intéresse uniquement aux modèles "ensemblistes" d'une telle théorie, on peut montrer qu'elles ont exactement le même pouvoir d'expression que les théories essentiellement algébriques (qui n'ont pas de types dépendants, mais autorisent des opérations partielles) ou que les théories cartésiennes (qui autorisent des prédicats). Mais les théories de Cartmell possèdent une structure supplémentaire : il y a deux façons différentes d'avoir une fonction entre deux types, soit par une "opération", soit par une "dépendance" de l'un sur l'autre. Cela permet de définir plus finement les modèles d'une théorie de Cartmell dans une catégorie équipée d'une notion de "fibrations" (qui vont servir à interpréter les types dépendants) par exemple dans une catégorie de modèles de Quillen ou dans une théorie des types. Cela permettra aussi de définir une théorie homotopique des modèles de la théorie de façon plus fine.

Cette structure supplémentaire que possèdent les théories de Cartmell se manifeste aussi (de façon très liée) par l'existence d'un des ingrédients importants des catégories de modèles de Quillen : un système de factorisation faible en "cofibrations/fibrations triviales" sur la catégorie des ses modèles ensemblistes. Les cofibrations sont les extensions de modèles obtenues en ajoutant librement des éléments à certain types (dont les paramètres sont fixés) et les fibrations triviales sont les morphismes qui ont la propriété de relèvement correspondante.

Ce que j'appelle un modèle faiblement algébrique pour une structure supérieure est une catégorie de modèles de Quillen (ou une structure légèrement plus faible comme une semi-catégorie de modèles) tel que :

- La catégorie et le système de factorisation cofibration/fibration trivial sous-jacent sont donnés par la catégorie des modèles d'une théorie de Cartmell et son système de factorisation.
- Les fibrations sont caractérisées par des propriétés de relèvements par rapport à certaines cofibrations entre objets libres finement engendrés.

On parle de modèle fortement algébrique quand en plus tout les objets sont fibrants.

Il s'avère que presque toutes les définitions de structures algébriques supérieures que l'on utilise forment justement des catégories de modèles de Quillen de cette forme, i.e. des "modèles faiblement algébriques". Le cas "fortement algébrique" correspond à ce qu'on appelle usuellement un modèle algébrique, où toute la structure est donnée par des opérations, qui sont préservées par les morphismes.

Par exemple pour les ensembles simpliciaux, les cofibrations sont obtenues en ajoutant itérativement librement des simplexes de dimension n dont le bord est déjà fixé. Cela correspond à une théorie de Cartmell : pour chaque n on a un type des "n-simplexes dont les faces sont spécifiés" qui dépend de paramètres spécifiant les faces, les opérations de "faces" sont codés par ces dépendances, et les dégénérescences sont des opérations. Et aussi bien pour la structure de modèle de Quillen qui modélise les types d'homotopies, que pour celle de Joyal qui modélise les quasi-catégories, les objets fibrants sont caractérisés par des propriétés de relèvement par rapport à certaines inclusions de cornet qui sont des cofibrations entre objets finiment engendrés.

La "machinerie" mise en place dans [21] que j'ai mentionnée plus haut, revient essentiellement à définir une théorie homotopique de ces "modèles faiblement algébriques" comparable à la théorie homotopique des opérades. Plus précisément [5], je construis une "catégorie de modèles de Quillen faibles" tel que :

- Les (bon) objets sont ces modèles faiblement algébriques.
- Les équivalences faibles sont les flèches qui induisent des équivalences de Quillen entre les notions modélisées (i.e. des équivalences entre les catégorie homotopiques).
- Les objets fibrants sont les modèles fortement algébriques.
- Les objets cofibrants sont les théories "complètement faibles" au sens où elles n'ont aucun axiomes d'égalités entre les opérations, mais uniquement des opérations supérieures produisant des "équivalences" entre les opérations.

Il s'avère que plusieures méthodes qui sont utilisées pour comparer différents modèles d'une même structure supérieure peuvent s'interpréter très naturellement dans ce formalisme. Par exemple, la construction de Nikolaus [39] qui permet de passer d'une structure faiblement algébrique à une structure fortement algébrique est une façon de prendre un remplacement fibrant. La comparaison des espaces de Rezk avec les quasi-catégories (cf. [2] pour sa version la plus générale) peut s'obtenir formellement en utilisant les propriétés d'une certaine structure monoïdale naturelle sur cette catégorie et la plupart des résultats de comparaisons entre ces modèles mélange un argument formel de ce type avec un "théorème de strictification" (qu'on discutera plus tard).

J'espère aussi (et j'ai déjà quelques résultats dans cette direction) que les nouvelles méthodes ainsi obtenues seront constructives et ouvriront la voie au développement plus systématique de la théorie des catégories supérieures en mathématiques constructives, voire idéalement à une théorie des structures algébriques supérieures utilisable dans le formalisme de la théorie homotopique des types.

Bien entendu de nombreuses questions doivent être traitées avant d'obtenir une théorie utilisable. La principale étant le problème de la strictification qui sera discuté dans la section suivante, mais en voici quelques autres exemples sur lesquelles je travaille :

- Il faudrait étendre la construction de [21] pour pouvoir définir autre chose que des ∞-groupoïdes. Les objets qui nous intéressent le plus pour l'instant sont clairement les $(\infty,1)$-catégories (voir (∞,n)-catégories), et on peut probablement appliquer une stratégie similaire à celle de [21] en s'inspirant de la propriété universelle de l'$(\infty,1)$-catégorie des (∞,n)-catégories données dans [4], ou de la théorie synthétique des $(\infty,1)$-catégories de [41].
- J'essaie de compléter la preuve de la version original de l'hypothèse d'homotopie. Je travaille notamment en collaboration avec Dimitri Ara et Edoardo Lanari dans ce but et des progrès ont étaient faits, mais cela semble être toujours hors de portée dans le cas générale, quoique éventuellement accessible en petite dimension grâce à des travaux récents (non publiés) d'E.Lanari.
- Je travaille à rendre les constructions de [21] effectivement constructives. La principale difficulté est [6] que constructivement les équivalences faibles d'∞-groupoïdes ne sont pas

5. et dans un autre langage : dans [21] les modèles fortement algébriques sont décrits par ce que j'appelle des catégories à cylindres
6. On le sait car il existe des topos dont la complétion en ∞-topos n'est pas hyper-complète.

caractérisées par les groupes d'homotopies π_n, or cette caractérisation joue un rôle important dans mes démonstrations, et il faut donc développer de nouvelles techniques.

- Il faudrait réfléchir à l'implémentation de ces méthodes en théorie des types. On peut se convaincre que l'argument de G.Brunerie s'applique directement à la définition d'∞-groupoïde globulaire présentée à la fin de [21]. Mais la définition ne suffit pas, il faut aussi pouvoir transporter les résultats et constructions. Un objectif ici serait de montrer qu'à partir d'un modèle non univalent de théorie des types on peut construire un modèle univalent des ∞-groupoïdes. Plus généralement, je cherche à comprendre de façon externe quels modèles et quelles constructions vont être internalisables en théorie des types et lesquelles ne le sont pas. Il faut à priori travailler avec des modèles "complètement faibles", i.e. des objets cofibrants, mais cela n'est pas clairement suffisant.

Enfin les "structure de modèles" qui apparaissent dans ces travaux sont en générales seulement des semi-structures à droite ou à gauche, voir des notions encore plus faibles. Je développe actuellement une théorie plus systématique de ces "structures de modèles faibles" avec notamment des théorèmes de construction de telles structures plus efficaces que ceux dont on dispose pour les structures de modèles de Quillen classiques. Comme application de cette théorie, j'essaie de :

- Montrer que toute catégorie test faible admet une semi-structure de modèles à droite sur sa catégorie de préfaisceaux modélisant les espaces (généralisant un résultat de D-C.Cisinski pour les catégories tests).
- Construire d'autres structures de modèles faibles sur la catégorie des pré-catégories à cylindres qui auront de meilleures propriétés de compatibilité à la structure monoïdale.
- Donner des preuves "constructives" de l'existence de certaines structures de modèles classiques.
- Construire de nouvelles structures de modèles sur la catégorie des polygraphes et des ∞-catégories non-unitaires qui serviront dans la section suivante.

2.1.1 Le problème de la strictification et la conjecture de Simpson

Comme je l'ai mentionné plus haut, les objets cofibrants de la structure de modèles faible sur les "théories algébriques supérieures" (sur les pré-catégories à cylindre) sont les modèles "complètement faibles", i.e. ceux dont la théorie de Cartmell n'as pas d'équations. Comme toute structure de modèles, la théorie présentée ci-dessus est surtout efficace pour comparer les objets cofibrants et fibrants. Or, la plupart des modèles que l'on utilise en pratique ne sont justement pas "complètement faibles", ils satisfont très souvent (à quelques exceptions près, comme les ∞-catégories de Grothendieck ou les objets semi-simpliciaux) quelques équations. Par exemple pour les ensembles simpliciaux les relations entre les faces et les relations faces / dégénérescences sont des relations spécifiant juste le "typage" des opérations, mais les relations entre les dégénérescences sont des équations et donc les modèles simpliciaux ne sont pas complètement faibles. C'est pour cette raison que dans [21] on passe par l'intermédiaire des ensembles semi-simpliciaux, qui eux forment un modèle complètement faible pour les ∞-groupoïdes.

Le fait qu'on utilise des modèles qui ne sont pas complètement faibles (et donc non cofibrants) ce traduit par un phénomène bien connu : il n'est pas toujours possible de comparer directement différents modèles et il faut souvent passer par des intermédiaires et avoir des zigzags d'équivalences de Quillen. Si on se restreint à des modèles fortement algébriques et complètement faibles, ils correspondent à des objets fibrants et cofibrants et donc toute équivalence entre ces objets est représentée par des équivalences de Quillen dans les deux directions !

Le passage de faiblement à fortement algébrique est une opération bien comprise (la construction de Nikolaus [39]) mais le passage du complètement faible, au "semi-strict" est beaucoup plus mystérieux et c'est ce qu'on appelle un problème de strictification (ou de semi-strictification).

La plupart des théorèmes de comparaison entre différents modèles sont en général un mélange d'un énoncé de strictification avec une autre technique générale qui se comprend bien dans le formalisme précédant et qui s'applique à un objet "suffisamment cofibrant". Il est donc absolument essentiel de comprendre dans une plus grande généralité les théorèmes de "(semi-)strictifications".

Il y a de très nombreux énoncés de strictification qui ont été montrés, et de très nombreux qui sont des conjectures, mais on observe d'importantes similitudes entre tous ces problèmes, et dans la façon dont ils sont résolus. Cela nous fait penser qu'il existe des énoncés de strictification beaucoup plus généraux qui couvrent la plupart de ces exemples. Et des énoncés assez généraux encourageant existent déjà : par exemple il y a de nombreux théorèmes de strictification pour les pseudo-algèbres pour une monade 2-catégorique, et surtout un théorème de strictification dû à C.Berger et I.Moerdijk ([7]) qui montre que pour toute opérade Σ-cofibrante la catégorie (homotopique) de ses algèbres strictes et la catégorie de ses algèbres "à homotopie près" sont équivalentes.

Comme la forme la plus générale que peut prendre un tel énoncé m'échappe encore j'ai décidé de tester mes idées sur l'un des problèmes de strictification le plus célèbre : la conjecture de semi-strictification de Simpson. Celle-ci affirme que tout ∞-groupoïde (faible) est équivalent à un ∞-groupoïde dont la composition est strictement associative et satisfait une loi d'échange stricte. Ce qui est intéressant avec cette conjecture, c'est que l'on dispose d'une stratégie assez précise pour la démontrer (celle utilisée dans l'article erroné [30]). Cette stratégie est une forme assez générale de ce que j'interprète comme étant la stratégie générale de strictification. Comme je l'ai expliqué dans le résumé de mes recherches, dans un article récent ([26]) j'ai analysé en détail l'article [30], mis en évidence où étaient les "erreurs" et expliqué comment les corriger. Malheureusement ces corrections font apparaître de nouvelles difficultés invisibles dans [30] et qui m'ont empeché de prouver la conjecture de Simpson. Cela dit les résultats obtenus sont encourageants aussi bien pour la conjecture de Simpson elle même que pour la recherche d'énoncés généraux de semi-strictifications. En effet, le points technique principal de mes résultats est la preuve que la notion d'∞-catégorie "non-unitaire" satisfait une condition extrêmement similaire à l'hypothèse "Σ-cofibrant" du théorème de Moerdijk et Berger mentionné plus haut.

J'ai notamment bon espoir de réussir à prouver d'ici peu une version affaiblie de la conjecture de Simpson, dite "régulière", qui revient à limiter le type d'opérations de compositions qui doivent être strictes à celles dont le diagramme de composition est topologiquement non-singulier. En effet, A.Hadziasanovic ([14]) et moi-même avons, indépendamment, introduit des notions de "polygraphes réguliers" ayant le même objectifs, et il s'avère que chacune des deux notions a les propriétés qui manque à l'autre pour démontrer un énoncé du type de la conjecture de Simpson. Ainsi si nous parvenons à montrer que les deux notions sont équivalentes (ce qui est une conjecture très raisonnable) nous serons très vraisemblablement en mesure de démontrer cette version affaiblie de la conjecture de Simpson et nous travaillons dans cette direction. J'espère aussi que cette version régulière de la conjecture permette de déduire la version plus forte.

Je m'intéresse aussi à d'autres problèmes de strictification, et notamment le problème de la construction de sémantiques pour la théorie homotopique des types (ou de fragments de cette théorie) dans des ∞-catégories qui a reçu énormément d'attention récemment. C'est un problème de strictification au sens où il s'agit de construire une équivalence entre une catégorie de modèles[7] des "interprétations" d'un fragment de la théorie des types et une autre catégorie de modèle représentant une notion d'∞-catégorie possédant certaines structures (limites finis, univers etc.). La principale difficulté est que la notion d'interprétation de la théorie des types

7. Ou une structure plus faible comme une catégorie d'objets fibrants.

est assez stricte ; ce qui rend leur construction difficile si on ne dispose pas de théorèmes de strictification appropriés [8].

2.2 Les relations entre un topos et sa C^*-algèbre

Cette partie de mon programme de recherches est dans la continuité de mes travaux de thèse. Bien qu'au cours de l'année passée mes efforts se soient concentrés sur la partie précédente, j'espère revenir rapidement aux questions mentionnés ici. Toutefois, il m'a paru plus efficace d'attendre de maitriser les outils de la théorie des catégories supérieures pour revenir aux questions liées à la K-théorie.

Dans [24] j'ai montré comment associer une algèbre de convolution et des C^*-algèbres réduites et maximales à un topos, d'une façon qui redonne de nombreuses constructions connues de C^*-algèbres (par exemple associées à un graphe, à un groupoïde étale, à un feuilletage etc.). L'étape suivante est d'étudier plus précisément comment le topos et son algèbre sont reliés et comment les propriétés de l'un sont connectées aux propriétés de l'autre.

Par exemple, il est connu que l'on peut retrouver la cohomologie le long des feuilles d'un feuilletage en terme de la cohomologie cyclique de l'algèbre de convolution du feuilletage (plus précisément de sa sous algèbre des fonctions lisses). La cohomologie le long des feuilles correspond à la cohomologie du topos associé à un feuilletage, et la C^*-algèbre du feuilletage est (à Morita équivalence près) la C^*-algèbre du topos. Ces résultats sont aussi connus pour les groupoïdes de Lie étales (cf [11]).

Il serait intéressant de comprendre si cela peut être formulé de façon générale pour un topos : peut-on relier la cohomologie du topos avec une cohomologie cyclique associée à la C^*-algèbre ? Y a-t-il quelque chose qui peut jouer le rôle des fonctions lisses en général ?

2.2.1 KK-théorie relative à un topos et conjectures d'isomorphismes

De façon similaire, on peut penser aux conjectures de Baum-Connes, de Bost et de Farrell-Jones comme des liens entre d'une part respectivement la K-théorie de la C^*-algèbre réduite du topos, la K-théorie Banachique de l'algèbre de convolution L^1 du topos ou la K-théorie algébrique de l'algèbre de convolution à support compact du topos et d'autre part des invariants K-théoriques directement attachés au topos.

Par exemple pour la conjecture de Baum-Connes, Si A et B sont deux C^*-algèbres, on sait définir un groupe de KK-théorie $KK(A, B)$ (introduit par G.Kasparov), et on dispose d'un produit, dit de Kasparov :

$$KK(B, C) \times KK(A, B) \to KK(A, C).$$

Ce produit fait des C^*-algèbres et des classes de KK-théorie, une catégorie additive qu'on va noter KK. On sait aussi que cette catégorie est en fait la catégorie homotopique d'une $(\infty, 1)$-catégorie stable assez naturelle. On retrouve la K-théorie classique comme étant $KK(\mathbb{C}, A)$. Et $KK(A, \mathbb{C})$ est ce qu'on appelle la K-homologie (le produit de Kasparov correspondant ici à l'accouplement entre les deux).

Cette construction s'étend en une KK-théorie équivariante $KK_G(A, B)$ pour A et B des C^*-algèbres munies d'une action d'un groupe G et en une KK-théorie au dessus d'un espace $KK_X(A, B)$ pour A et B des champs de C^*-algèbres sur un espace topologique X (ces deux

8. Des résultats partiels très intéressants ont été obtenus dans cette direction par P.Lumsdain et M.A.Warren dans [35] et par C.Kapulkin et K.Szumilo dans [31]. Mais la question est encore loin d'être résolue.

extensions aussi dûes à Kasparov). Et il n'est pas très difficile de généraliser les deux constructions en une KK-théorie $KK_{\mathcal{T}}(A,B)$ pour A et B deux champs de C^*-algèbres sur un topos $\mathcal{T}$.

En ajoutant à cela le théorème de Green-Julg, prouvé dans [17], on devrait aboutir à un isomorphisme de Green-Julg : $KK_{\mathcal{T}}(A,B) \simeq KK(A, B \rtimes \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est un topos satisfaisant les hypothèses du théorème de Green-Julg, B une C^*-algèbre au-dessus de $\mathcal{T}$ et A une C^*-algèbre classique, vue comme un champ constant sur $\mathcal{T}$. Cet isomorphisme de Green-Julg est un cas particulier de la conjecture de Baum-Connes.

Dans ce language, la conjecture de Baum-Connes (avec coefficients) affirme essentiellement que la K-théorie $KK(\mathbb{C}, B \rtimes \mathcal{T})$ peut s'approximer en utilisant les isomorphismes de Green-Julg pour des résolutions "raisonnables" $\mathcal{E} \to \mathcal{T}$ qui satisfont les hypothèses du théorème de Green-Julg. C'est à dire que $K(B \rtimes \mathcal{T})$ s'écrit comme une limite inductive sur toutes ces résolutions des $KK_{\mathcal{E}}(\mathbb{C}, B)$ qui sont souvent plus simples à calculer.

Bien entendu, sous une forme aussi générale, cette conjecture est fausse (des contre-exemples sont connus, cf [28]), mais de très nombreux cas particuliers sont démontrés (groupes et feuilletages ayant la propriété de Haagerup, un grand nombre nombre de réseaux dans les groupes de Lie, groupes hyperboliques, etc). Comprendre dans quelles situations cette conjecture est vraie ou non est un problème très intéressant, souvent difficile et dans tous les cas très important. Nous espérons que pour beaucoup de ces cas particuliers, les méthodes employées pourront s'interpréter dans le formalisme de la théorie des topos et se généraliser.

On peut aussi reproduire des analogues de la conjecture de Bost et de la conjecture de Farrell-Jones et cette approche est probablement plus intéressante pour ces deux autres cas. Dans le cadre de la théorie des topos l'algèbre de Banach L^1 et l'algèbre de convolution à support compact sont caractérisées par des propriétés universelles qui permettent de relier directement les classes de K-théorie de ces algèbres avec des objets géométriques définis sur le topos. De plus la conjecture de Farrell-Jones n'a à ma connaissance jamais été formulée en dehors du cas des groupes. Cette généralisation aux topos ouvre la voie à voir la conjecture de Farrell-Jones comme une question d'invariance de la K-théorie algébrique de l'algèbre de convolution par *certaines* déformations continues du topos. C'est une idée qui joue clairement un rôle dans les preuves de plusieurs cas particuliers de la conjecture.

2.3 La C^*-algèbre d'un champ différentiel

Les champs différentiels ([37]) sont un type de "variétés généralisées" assez similaires aux difféologies [9]. Un champ différentiel est un (pseudo) faisceau de groupoïdes sur la catégorie des variétés, pour la topologie dont les recouvrements sont les submersions surjectives. Autrement dit, $\mathcal{X}$ est défini en spécifiant pour chaque variété M un groupoïde $\mathcal{X}(M)$ des "morphismes de M dans $\mathcal{X}$" (fonctoriellement à équivalence près) avec la condition de faisceau énonçant que si $p : N \twoheadrightarrow M$ est une submersion surjective, un morphisme de M dans $\mathcal{X}$ est la même chose qu'un morphisme de N dans $\mathcal{X}$ qui est "constant le long des fibres de p" en un certain sens.

Par exemple, à tout groupoïde de Lie G on peut associer un champ différentiel $\mathcal{G}$ que l'on peut voir comme "l'espace des orbites de G". Ce champ caractérise le groupoïde G à équivalence de Morita près. Grâce aux résultats de [43], on peut étendre cela en la construction d'un champ associé à tout algébroïde de Lie intégrable ou non (qui redonne le champs du groupoïde universel correspondant si l'algébroïde est intégrable).

9. Les difféologies sont exactement les 0-champs différentiels effectifs.

Or d'une part la C^*-algèbre d'un groupoïde de Lie G ne dépend à Morita équivalence près que du champ $\mathcal{G}$, et elle ne dépend à isomorphisme près que de la submersion $G_0 \twoheadrightarrow \mathcal{G}$. D'autre part il existe des exemples de champs ne provenant pas de groupoïdes qui ont une C^*-algèbre associée. Par exemple la construction par I.Androulidakis et G.Skandalis dans [1] de la C^*-algèbre d'un feuilletage singulier est basée sur la construction d'un "groupoïde d'holonomie" dont la structure précise n'est pas définie et qui s'interprète assez naturellement comme un champ. La C^*-algèbre d'un 2-groupoïde strict défini dans [9] est aussi un exemple de ce type, et d'une certaine façon les C^*-algèbres de groupoïdes de Lie non-séparés en sont un autre.

Cela suggère que l'on doit pouvoir associer une C^*-algèbre (bien définie à équivalence de Morita près) à un champ différentiel. La construction de la C^*-algèbre d'un topos que j'ai faite dans [24] mélangée aux idées utilisées dans [1] semble donner la méthode à suivre pour ce faire. Pouvoir associer une C^*-algèbre aux champs correspondant aux algébroïdes non intégrables permettrait d'étendre les techniques de quantification "à la Weyl" (comme présentées par exemple dans [32]) à n'importe quel algébroïde indépendamment de son intégrabilité. En effet, la C^*-algèbre d'un groupoïde de Lie et certains opérateurs non bornés qui lui sont affiliés, forment une quantification par déformation de l'algèbre de Poisson des fonctions sur le dual de l'algébroïde de Lie.

Il faut toutefois mentionner que cette construction touche aux limites de ce qu'offre les C^*-algèbres. Certains champs donneront lieu à des C^*-algèbres intéressantes (comme ceux correspondant aux objets étudiés dans [1]) mais d'autres seront trop complexes pour que la C^*-algèbre puisse réellement capter l'information (des exemples de ce type dans le monde des 2-groupoïdes sont donnés dans [9]). Cela correspond à des champs qui n'admettent pas suffisamment de "représentations" sur des espaces de Hilbert, ou encore tel que le G_1 d'un groupoïde qui les représentent est trop irrégulier pour avoir beaucoup de densités distinctes définies dessus. Par exemple, en terme d'algébroïdes de Lie, on s'attend à ce que les représentations de la C^*-algèbre associée soit essentiellement les représentations de l'algébroïde (par des opérateurs auto-adjoints non bornés sur un espace de Hilbert). Mais il n'est pas clair que tous les algébroïdes admettent beaucoup de telles représentations. Cela dit, on peut argumenter que la mécanique quantique est uniquement intéressée par des représentations sur des espaces de Hilbert et donc que ce formalisme est parfaitement adapté pour parler de quantification. Dans tous les cas, on pourra ensuite essayer de reprendre les idées de [27] sur la "tovariance" en remplaçant les topos par les champs différentiels qui sont beaucoup plus riches du point de vue de la physique, et le formalisme précédant leur donne un lien direct avec les fondements de la mécanique quantique.

Références

[1] Iakovos Androulidakis and Georges Skandalis. The holonomy groupoid of a singular foliation. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2009(626) :1–37, 2009.

[2] Dimitri Ara. Higher quasi-categories vs higher rezk spaces. *Journal of K-theory*, 14(3) :701–749, 2014.

[3] Bernhard Banaschewski and Christopher J Mulvey. A globalisation of the Gelfand duality theorem. *Annals of Pure and Applied Logic*, 137(1) :62–103, 2006.

[4] Clark Barwick and Christopher Schommer-Pries. On the unicity of the homotopy theory of higher categories. *arXiv preprint arXiv :1112.0040*, 2011.

[5] Benno van den Berg. Path categories and propositional identity types. *arXiv preprint arXiv :1604.06001*, 2016.

[6] Benno van den Berg and Ieke Moerdijk. Exact completion of path categories and algebraic set theory. *arXiv preprint arXiv :1603.02456*, 2016.

[7] Clemens Berger and Ieke Moerdijk. Axiomatic homotopy theory for operads. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 78(4) :805–831, 2003.

[8] Guillaume Brunerie. *On the homotopy groups of spheres in homotopy type theory.* PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, 2016. arXiv preprint arXiv :1606.05916.

[9] Alcides Buss, Ralf Meyer, and Chenchang Zhu. Non-hausdorff symmetries of C^*-algebras. *Mathematische Annalen*, 352(1) :73–97, 2012.

[10] John Cartmell. Generalised algebraic theories and contextual categories. *Annals of Pure and Applied Logic*, 32 :209–243, 1986.

[11] Marius Crainic. Cyclic cohomology of étale groupoids : the general case. *K-theory*, 17(4) :319–362, 1999.

[12] Eric Finster and Samuel Mimram. A type-theoretical definition of weak ω-categories. *arXiv preprint arXiv :1706.02866*, 2017.

[13] Jonathon Funk, Pieter Hofstra, and Benjamin Steinberg. Isotropy and crossed toposes. *Theory and Applications of Categories*, 26(24) :660–709, 2012.

[14] Amar Hadzihasanovic. The algebra of entanglement and the geometry of composition. *arXiv preprint arXiv :1709.08086*, 2017.

[15] Simon Henry. Constructive Gelfand duality for non-unital commutative C^*-algebras. *arXiv preprint arXiv :1412.2009*, 2014.

[16] Simon Henry. *Des topos à la géométrie non commutative par l'étude des espaces de Hilbert internes.* PhD thesis, Université Paris 7, 2014.

[17] Simon Henry. Complete C^*-categories and a topos theoretic Green-Julg theorem. *arXiv preprint arXiv :1512.03290*, 2015.

[18] Simon Henry. A geometric Bohr topos. *arXiv preprint arXiv :1502.01896*, 2015.

[19] Simon Henry. On toposes generated by cardinal finite objects. *arXiv preprint arXiv :1505.04987*, 2015.

[20] Simon Henry. Toward a non-commutative Gelfand duality : Boolean locally separated toposes and monoidal monotone complete C^*-categories. *arXiv preprint arXiv :1501.07045*, 2015.

[21] Simon Henry. Algebraic models of homotopy types and the homotopy hypothesis. *arXiv preprint arXiv :1609.04622*, 2016.

[22] Simon Henry. Localic metric spaces and the localic gelfand duality. *Advances in Mathematics*, 294 :634 – 688, 2016.

[23] Simon Henry. Measure theory over boolean toposes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 2016.

[24] Simon Henry. The convolution algebra of an absolutely locally compact topos. *arXiv preprint arXiv :1701.00113*, 2017.

[25] Simon Henry. The localic istropy group of a topos. *arXiv preprint arXiv :1706.04835*, 2017.

[26] Simon Henry. Non-unital polygraphs form a presheaf category. *arXiv preprint arXiv :1711.00744*, 2017.

[27] Chris Heunen, Nicolaas P Landsman, and Bas Spitters. A topos for algebraic quantum theory. *Communications in mathematical physics*, 291(1) :63–110, 2009.

[28] Nigel Higson, Vincent Lafforgue, and Georges Skandalis. Counterexamples to the Baum-Connes conjecture. *Geometric and Functional Analysis*, 12(2) :330–354, 2002.

[29] A. Joyal and M. Tierney. *An extension of the Galois theory of Grothendieck*. American Mathematical Society, 1984.

[30] Mikhail M Kapranov and Vladimir A. Voevodsky. ∞-groupoids and homotopy types. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 32(1) :29–46, 1991.

[31] Chris Kapulkin and Karol Szumiło. Internal language of finitely complete $(\infty, 1)$-categories. *arXiv preprint arXiv :1709.09519*, 2017.

[32] Nicolaas Pieter Landsman. Lie groupoid C^*-algebras and Weyl quantization. *Communications in mathematical physics*, 206(2) :367–381, 1999.

[33] F William Lawvere. An elementary theory of the category of sets. *Proceedings of the national academy of sciences*, 52(6) :1506–1511, 1964.

[34] Tom Leinster. A survey of definitions of n-category. *Theory and applications of Categories*, 10(1) :1–70, 2002.

[35] Peter LeFanu Lumsdaine and Michael A Warren. The local universes model : an overlooked coherence construction for dependent type theories. *ACM Transactions on Computational Logic (TOCL)*, 16(3) :23, 2015.

[36] Jacob Lurie. Tannaka duality for geometric stacks. *arXiv preprint math/0412266*, 2004.

[37] David Metzler. Topological and smooth stacks. *arXiv preprint math/0306176*, 2003.

[38] Christopher J Mulvey and Joan Wick Pelletier. A globalization of the Hahn-Banach theorem. *Advances in Mathematics*, 89(1) :1–59, 1991.

[39] Thomas Nikolaus. Algebraic models for higher categories. *Indagationes Mathematicae*, 21(1) :52–75, 2011.

[40] Simona Paoli. Segal-type models of higher categories. *arXiv preprint arXiv :1707.01868*, 2017.

[41] Emily Riehl and Michael Shulman. A type theory for synthetic ∞-categories. *arXiv preprint arXiv :1705.07442*, 2017.

[42] Carlos Simpson. Homotopy types of strict 3-groupoids. *arXiv preprint math/9810059*, 1998.

[43] Hsian-Hua Tseng and Chenchang Zhu. Integrating lie algebroids via stacks. *Compositio Mathematica*, 142(1) :251, 2006.

[44] Benno Van Den Berg and Richard Garner. Types are weak ω-groupoids. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 102(2) :370–394, 2011.

[45] Dominic Verity. Weak complicial sets I. basic homotopy theory. *Advances in Mathematics*, 219(4) :1081–1149, 2008.

[46] Vladimir Voevodsky et al. Homotopy type theory : Univalent foundations of mathematics. *Institute for Advanced Study (Princeton), The Univalent Foundations Program*, 2013.